Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA2221 RELACIONES
Sept.-dic. 2006
[opcional], [Claudio Margaglio]

RELACIONES

Def.1 Dados dos conjuntos no vacíos, A, B , una relación R de A en B se define por medio de ("es") un subconjunto S_R del producto cartesiano AxB .Se dice entonces que " el elemento $a \in A$ está relacionado con el elemento $b \in B$ (y se escribe aRb) si y sólo si el par ordenado (a,b) pertenece al subconjunto S_R mediante el cual se definió la relación R; en el caso contrario (si $(a,b) \notin S_R$), se dice que " a no está relacionado con b " .

Ejemplo 1.
Sean A= {1, 2, 4, 6, 9 } , B= { 1, 2, 3, 4 } ,
S_R = { (1, 2) , (1, 3) , (1, 4) , (2, 3) , (2, 4) } entonces Ud. puede verificar que un elemento $x \in A$ está relacionado con $y \in B$, si y sólo si $x<y$.

Ejemplo 2. Sea T la relación de A en B (que son los mismos del ejemplo anterior) determinada por :

"xTy si y sólo si x es múltiplo de y " ;

Ud. puede verificar facilmente que en este ejemplo, el subconjunto de AxB que define la relación T es el siguiente :
S_T = { (1, 1) , (2, 1), (2, 2) , (4, 1), (4, 2), (4, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3) , (9, 1) , (9, 3) } .

Def.2. Dada una relación R de A en B, el conjunto S_R se llama a veces la <u>gráfica</u> de la relación y puede ser util, a veces, para dar una idea intuitiva acerca de la relación dada.

Ejemplo 3. Sean A=B=**R**= conjunto de los números reales y sea:

$$xTy \text{ si y sólo si } x^2+y^2=1 ,$$

entonces $S_T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ y el conjunto S_T dibujado en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, es la circunferencia de centro el origen y radio 1.

MA2221 RELACIONES
Sept.-dic. 2006
[opcional], [Claudio Margaglio]

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

def.3. Una <u>función</u> , f, de A en B [como de costumbre, se indicará con un símbolo del tipo f : $A\to B$] es una relación de A en B con la propiedad que para todo $x\in A$ hay <u>uno y un solo</u> par ordenado en S_f , con primer elemento x .
A título de ejemplo, ninguna de las tres relaciones de los tres ejemplos anteriores, es una función.

Observación.
Generalmente, cuando en un curso de matemáticas se define el concepto de <u>función</u> f: $A\to B$, se dice que es " una ley de correspondencia, que a todo elemento x del conjunto A asocia uno y un solo elemento f(x) del conjunto B ". Esta definición es equivalente (aunque más intuitiva) a la def. 3 dada acá.

En forma análoga, podríamos definir una <u>relación</u> T, de A en B como "una ley de correspondencia que a algunos elementos de A (podrían ser uno, ninguno o más que uno) asocia algunos elementos de B " . Por ejemplo, con referencia a la relación T del ejemplo 3, tendríamos : la relación T no asocia ningun elemento a los números reales menores que -1 o mayores que 1 , asocia un número real (a saber, el cero) al número -1 y al número 1 , asocia dos números reales, dados por la fórmula $\pm\sqrt{1-x^2}$ a todo número real del intervalo (-1, 1) . Usando fórmulas, en manera análoga a lo que se hace cuando se trabaja con funciones, podríamos

escribir : $\begin{cases} T(x)=\varnothing, \text{ si } x\notin(-1,1) \\ T(x)=0 \text{ si } x=-1 \text{ o } x=1 \\ T(x)=\pm\sqrt{1-x^2}, \text{ si } x\in(-1,1) \end{cases}$.

Dada una relación T, de A en B , el conjunto $T(x)=\{\, y\in B \mid xTy\}$, es decir, el conjunto de todos los elementos de B que resultan asociados al elemento $x\in A$, se llama la <u>imagen</u> de x ; más en general, podemos dar la siguiente :

Def.4. Dada una relación T, de A en B y un subconjunto H de A, se llama la <u>imagen</u> de H (por acción de T) y se indica con T(H), el siguiente subconjunto de B : $T(H)=\{\, y\in B \mid xTy, \text{ para algún } x\in H\}$.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA2221 RELACIONES
Sept.-dic. 2006
[opcional], [Claudio Margaglio]

Def 4'. En forma parecida se define la <u>preimagen</u> $T^{-1}(K)$ de cualquier subconjunto K de B: $T^{-1}(K)=\{ x\in A \mid xTy, \text{ para algún } y\in K\}$.

Def.4". Dada una relación T de A en B, se llama <u>dominio</u> de la relación, el siguiente subconjunto de A :

$$\{x\in A \mid \text{existe almenos un elemento } y\in B \text{ , tal que } (x, y)\in S_T\}$$

Ejemplo 3'. Consideremos la relación T de A en B definida en la forma siguiente :

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c, d\}$, $S_T=\{(1, b), (1, c), (3, d)\}$;

La imagen de T es el conjunto $\{b, c, d\}$; el dominio de T es el conjunto $\{1, 3\}$.

Ejemplo 4. Consideremos la relación T , de A en B ,

con $A=B= \{a, b, c, d, e\}$, definida en la forma siguiente : xTy si y sólo si x,y son ámbas letras de la palabra "baco" y si ademas x es igual o antecede <u>y</u> en tal palabra ; tenemos entonces:

$S_T = \{ (a,a), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,c) \}$;

$T(a)=\{a, c\}$; $T(b)=\{a, b, c\}$; $T(c)=\{c\}$; $T(d)=\varnothing$;
$T^{-1}(\{b,d\}) = \{b, c\}$;

Ejemplo 5. Consideremos la relación $f : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ **,** definida por $f(x)=x^2+x-1$, [se trata en particular de una función] ;
Entonces , por ejemplo :
$f(3) = 11$, [observe que, sin peligro de ambiguedad, podemos escribir $f(3)=11$ en lugar de $f(\{3\})=\{11\}$] ;
$f^{-1}(5) = \{-3, 2\}$; $f^{-1}(-7) = \varnothing$; $f^{-1}([-2, 11]) = [-4, 3]$;
$f^{-1}([5, 11]) = [-4, -3]\cup[2, 3]$; $f^{-1}([-29, 0]) = \{0\}$.

<u>Convenio.</u>
Si R es una relación de A en B y si los dos conjuntos A, B son el mismo conjunto E , [A= B= E] , entonces diremos sencillamente que:
" R es una relación definida en E " y en este caso el conjunto S_R será subconjunto de ExE .

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Los dos tipos de relaciones de las cuales nos ocuparemos , serán : 1) funciones de A en B ; 2) relaciones en un conjunto A.
Para relaciones definidas en un conjunto A, interesan las siguientes propiedades, que definiremos a continuación (observe que tales definiciones podrian no tener sentido si fuese $A \neq B$).

Def.5. Relaciones reflexivas.
Una relación R definida en el conjunto A se llama reflexiva, si y sólo si para todo $x \in A$ se tiene xRx (es decir : todo elemento está relacionado consigo mismo).

Ejemplo 6.
En el conjunto Z de los números enteros : la relación "menor o igual" es reflexiva, mientras que la relación " estrictamente menor" no es reflexiva.
Ejemplo 7.
La relación R, definida en E= {1, 2, 3, 4 } por el conjunto
S_R = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4) , (4, 3), (4, 4) } <u>no es</u> reflexiva ya que el elemento 3 no está relacionado consigo mismo.
Def.6. Relaciones simétricas.
Una relación R definida en el conjunto A se llama simétrica, si y sólo si xRy implica yRx (es decir : toda vez que algún elemento x está relacionado con otro, <u>y</u>, obligatoriamente <u>y</u> debe estar relacionado con x).
Por ejemplo, la relación definida en el ejemplo 7 es simétrica ;
La relación "vacía" V, definida en cualquier conjunto E , por ejemplo en E= {1, 2, 3, 4 } es simétrica pero no es reflexiva ;
La relación "identidad", I , (definida en cualquier conjunto por xIy si y sólo si x=y) es simétrica y también reflexiva.
Def.7. Relaciones transitivas.
Una relación R definida en el conjunto A se llama transitiva, si y sólo si, toda vez que se tenga, para ciertos elementos x, y, z (no necesariamente distintos) xRy, yRz entonces se tiene también xRz.
Ejemplo 8.
Las relaciones de "menor o igual" y "estrictamente menor" en el conjunto de los enteros, son transitivas.

La relación definida en el ejemplo 7 no es transitiva, ya que si consideramos x=z=3 , y=4 tenemos xRy, yRz, pero no se cumple que xRz , es decir, no se cumple 3R3, ya que el par ordenado (3, 3) no pertenece al conjunto que define la relación.

Ejemplo 9.
La relación de "ser hermano de" , definida en cierto conjunto de personas, es simétrica, pero ni reflexiva ni transitiva.
Si por ejemplo, en el conjunto E= { Carlos, Mario, Juan } resulta que Juan y Mario son hermanos y Carlos es el padre de ambos, entonces, indicando las personas con la inicial de su nombre, tendríamos : S_R = { (J, M), (M, J) } $\subseteq$ ExE y el lector puede observar que ninguno de los pares ordenados (J, J), (M, M), (C, C) se halla en el conjunto S_R (deberían estar los tres para que la relación fuese reflexiva) y además, por ejemplo, se tiene, pensando x=z=J , y= M , xRy, yRz, pero no xRz , así que tampoco la relación es transitiva (en palabras, podríamos decir que: un hermano de mi hermano no necesariamente es mi hermano, ya que podría ser yo mismo...).

Def.8. Relaciones antisimétricas.
Una relación R definida en el conjunto A se llama antisimétrica, si y sólo si toda vez que se tenga xRy , yRx , obligatoriamente se tiene x=y . En forma equivalente, si x≠y entonces se puede presentar a lo máximo una de las dos relaciones xRy , yRx pero no ambas.

Ejemplo 10.
La relación de "menor o igual" en el conjunto de los enteros es antisimétrica, mientras que la relación "estrictamente menor" no lo es. La relación definida en el ejemplo 7 no es antisimétrica ya que por ejemplo se tiene 1R2, 2R1 , pero 1≠2 .

Observación.
Póngase atención acerca del hecho que "antisimética" no es la negación de "simétrica". Por ejemplo hay relaciones que son al mismo tiempo simétricas y antisimétricas, y no se trata solamente de la relación "identidad".

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA2221 RELACIONES
Sept.-dic. 2006
[opcional], [Claudio Margaglio]

Ejemplo 11.
Sea R la relación definida en el conjunto E= {1, 2, 3, 4} por
S_R = { (1, 1), (3, 3) } ; esta relación es al mismo tiempo simétrica y antisimétrica ,(aunque se trate de una relación no muy interesante...) ; observe que además esta relación también es transitiva pero <u>no</u> es reflexiva.

Def.9. Relaciones de orden parcial.
Una relación R , definida en un conjunto E se llama una <u>relación de orden parcial</u>, o simplemente una <u>relación de orden</u>, si y sólo si es
reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Def.9. Relaciones de equivalencia.
Una relación R , definida en un conjunto E se llama una <u>relación de equivalencia</u> si y sólo si es
reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 12.
Sea E el conjunto de todas las rectas de cierto plano y , dadas dos rectas r, s de este plano, sea rRs si y sólo si r, s son paralelas.
Entonces, observando que toda recta es paralela a si misma (reflexividad) , que si r es paralela a s entonces también s es paralela a r (simetría), y que si de tres rectas, s1, s2, s3 (no necesariamente distintas) s1 es paralela a s2 y s2 es paralela a s3, entonces necesariamente s1 resulta ser paralela a s3, podemos concluir que : la relación R es una relación de equivalencia.

Ejemplo13.

Sea E el conjunto de todas las fracciones $\frac{p}{q}$ de números enteros (con denominador, q, no nulo) y sea T la relación definida por :
$\frac{p}{q}\ T\ \frac{m}{n}$ si y sólo si pn=mq ; el lector puede verificar facilmente que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva, así que resulta ser una relación de equivalencia.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Observe que los dos números racionales representados por las dos fracciones $\frac{p}{q}, \frac{m}{n}$ son el mismo número racional, si y sólo si las dos fracciones son equivalentes (es decir, estan relacionadas por la equivalencia de este ejemplo).

Ejemplo 14.
Sea E el conjunto de todos los subconjuntos de cierto conjunto H (este conjunto se indica con P(H) y se llama el conjunto de las partes de H); en el conjunto P(H), la relación T de inclusión, $\subseteq$, para los subconjuntos de H resulta ser una relación de orden parcial.
A título de ejemplo, sea H = {1, 2, 3} ; entonces el conjunto E=P(H) tiene 8 elementos : **a**={ }= conjunto vacío, **b**={1}, **c**={2} , **d**={3}, **e**={1, 2} , **f**={1, 3} , **g**={2, 3} , **h**={1, 2, 3}=H ; el conjunto que define T en este ejemplo será entonces :
S_T = { (a, a), (a, **b**),(a, **c**),(a, **d**),(a, **e**),(a, **f**),(a, **g**),(a, **h**), (**b**, **b**), (**b**, **e**), (**b**, **f**), (**c**, **c**), (**c**, **e**), (**c**, **g**),(**d**, **d**), (**d**, **f**), (**d**, **g**), (**e**, **e**), (**e**, **h**), (**f**, **f**), (**f**, **h**), (**g**, **g**), (**g**, **h**), (**h**, **h**) };
observe que como todo conjunto es subconjunto de si mismo, esta relación es reflexiva; también está claro que es una relación transitiva y, como dos conjuntos A, B son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos, también la relación es antisimétrica.

Ejemplo 15.
Consideremos, en el conjunto E={1, 2, 3, 4, 6, 7} la relación D definida por : mDn si y sólo si m divide a n (es decir, n es múltiplo entero de m); es facil verificar que esta relación también es de orden parcial. El subconjunto de ExE que la define es el siguiente :
S_D = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)}.

Def.10. Clases de equivalencia.
Dada una relación de equivalencia S en un conjunto E y un elemento $a \in E$, se llama clase de equivalencia representada por a

y se indica con uno de los siguientes símbolos : $[a]_S$, $[a]$, $\overline{a}$, el siguiente subconjunto de E : $[a]_S=\{x\in E \mid aSx\} =\{x\in E \mid xSa\}$;
es decir : la clase de equivalencia representada por a es el subconjunto de E formado por todos los elementos de E que estan relacionados con a .
Observe que por ser la relación S en particular simétrica podemos, en la definición de $[a]_S$ escribir indiferentemente aSx o xSa.
El símbolo $[a]_S$ se usa sólo cuando pueda haber ambiguedad usando los otros; por ejemplo si en cierto problema estan involucradas dos diferentes equivalencias en un mismo conjunto será necesario especificar, al considerar una clase de equivalencia de una de ellas, de cual de las dos se trata.
En los demás casos siempre se usará uno de los otros dos símbolos, que son más sencillos.

Ejemplo 16.
Sea E=Z el conjunto de los números enteros y sea S la equivalencia definida en la forma siguiente : xSy si y sólo si y-x es múltiplo de 4 (o, si se prefiere, xSy si y sólo si las divisiones enteras de x, y por 4 proporcionan el mismo resto); por ejemplo 3S7, -20S48 etc.
Como en la división entera de un número x por 4 hay sólo 4 posibles restos (a saber : 0, 1, 2, 3) se constata que hay 4 posibles clases de equivalencia. Ellas son :
$[0] = \{...,-12,-8,-4, 0, 4, 8, ...\}$, $[1] = \{...,-11,-7,-3, 1, 5, 9, ...\}$,
$[2] = \{...,-10,-6,-2, 2, 6, 10, ...\}$, $[3] = \{...,-9,-5,-1, 3, 7, 11, ...\}$.

Def.10. Conjunto cociente.
Dados un conjunto E y una relación de equivalencia, S, en E , el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia, se llama el conjunto cociente de E respecto a la relación de equivalencia dada, y se indica con el símbolo $\frac{E}{S}$, o E/S .
El conjunto cociente en el caso del ejemplo 15 es el siguiente :

$$E/S = \{[0], [1], [2], [3] \} .$$

Observe que el conjunto cociente de un conjunto E respecto a una relación de equivalencia definida en E, siempre es un subconjunto del conjunto de las partes de E : $E/S \subseteq P(E)$;

Def.11. Partición de un conjunto.
Dado un conjunto E se llama partición de E a toda familia **F** de subconjuntos de E que tenga las siguientes tres propiedades :
i) todo elemento de la familia **F** es un subconjunto no vacío de E ;
ii) la unión de todos los subconjuntos de E que son miembros de **F** es exactamente E ;
iii) dos elementos diferentes de **F** siempre tienen intersección vacía (es decir : si dos miembros de **F** tienen algún elemento común, entonces deben coincidir).
Ejemplo 17.
Dados un conjunto E y una relación de equivalencia en E, considerando todas las clases de equivalencia siempre se obtiene una partición de E. Por ejemplo los 4 subconjuntos del conjunto Z de los enteros, considerados en el ejemplo 16 :
$[0] = \{...,-12,-8,-4, 0, 4, 8, ...\}$, $[1] = \{...,-11,-7,-3, 1, 5, 9, ...\}$,
$[2] = \{...,-10,-6,-2, 2, 6, 10, ...\}$, $[3] = \{...,-9,-5,-1, 3, 7, 11, ...\}$,
forman una partición de E : $\mathbf{F} = \{[0], [1], [2], [3] \}$.
El lector podría entonces afirmar que <u>una partición de un conjunto E es exactamente lo mismo que un conjunto cociente de E respecto a una conveniente equivalencia</u> y esta afirmación es, sin duda alguna, correcta.
En particular demostraremos el siguiente :

Teorema fundamental de las equivalencias.
Dado un conjunto E, no vacío, hay una correspondencia biunívoca (es decir una función biyectiva) natural entre del conjunto G de todas las relaciones de equivalencia en E al conjunto P de todas las particiones de E . Esta correspondencia se obtiene asociando a cada equivalencia en E la partición de E cuyos elementos son las diferentes clases de equivalencia.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Demostración.
Para toda equivalencia T en E, sea $\phi(T)$ la partición obtenida con la familia de subconjuntos de E cuyos miembros son las diferentes clases de equivalencia. Por supuesto, tendremos que verificar que así hemos obtenido efectivamente una partición de E (*****).
De esta manera tenemos una función ϕ: $G \to P$ que a toda equivalencia en E (es decir a todo elemento de G) asocia una y una sola partición de E. Lo que falta, para completar la demostración, es poner en evidencia que la función ϕ es biyectiva, es decir inyectiva (******) y sobreyectiva(*******).
(*****) Verifiquemos que el conjunto de las diferentes clases de equivalencia cumple con las propiedades que definen una partición :
(**i**) ninguna clase de equivalencia es vacía . En efecto, por ser la equivalencia T reflexiva, tenemos, para cualquier clase de equivalencia, $[a]$: $a \in [a]$;
(**ii**) verifiquemos luego que la unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto E, es decir que todo elemento ,b , de E
pertenece a alguna clase de equivalencia : esto de nuevo es consecuencia de la reflexividad $b \in [b]$;
(**iii**) verifiquemos por último que si dos clases de equivalencia tienen algún elemento común, deben ser la misma clase.
sea $c \in [a] \cap [b]$, entonces será aTc, bTc y por la simetría de T también cTb y de esto sigue, por la transitividad de T :

aTc, cTb implica aTb.

Si x es cualquier elemento de [b] será bTx, luego de aTb, bTx sigue aTx por lo cual x es también elemento de [a] .
Pero entonces $[b] \subseteq [a]$. En forma análoga, intercambiando los papeles de a, b se verifica que $[a] \subseteq [b]$ y por lo tanto $[b] = [a]$.
(******) Inyectividad de ϕ . Bastará verificar que equivalencias diferentes llevan a particiones diferentes. Si R, T son equivalencias diferentes, definidas en E, los conjuntos S_R , S_T son diferentes, luego almenos uno de ellos tendrá un elemento (a,b) que no pertenece al otro. Sea por ejemplo $(a,b) \in S_R$, $(a,b) \notin S_T$. Esto significa que $b \in [a]_R$ pero $b \notin [a]_T$, Por otra parte si fuese $\phi(R) = \phi(T)$, tendríamos que siendo $[a]_R$ un miembro de la partición $\phi(R)$, también debería ser miembro de la

partición $\phi(T)$ y entonces como $b\in[a]_R$, también debería ser $b\in[a]_T$ lo cual no se cumple, ya que $(a,b)\notin S_T$.
(*******)Sobreyectividad de ϕ . Sea L cualquier partición de E y definamos la relación T de la forma siguiente : xTy si y sólo si los elementos x, y pertenecen a un mismo subconjunto, miembro de L.
Apenas verifiquemos que T es una equivalencia, tendremos que $\phi(T)=L$ y estará comprobada la sobreyectividad de ϕ.
Reflexividad : asi $a\in A\in L$, será evidentemente aTa ya que a pertenece al mismo miembro, A, de la partición L que el mismo a;
Simetría : si $a,b\in A\in L$ será evidentemente $b,a\in A\in L$;
Transitividad : si $a,b\in A\in L$ y $b,c\in A\in L$ será también $a,c\in A\in L$.
Aqui termina la demostración del teoremas fundamental de las equivalencias.

Ejemplo 18.
Sean E={1, 2, 3, 4, 5, 6 } , $f : E\to Z$ la función definida por
$f(x)= x^2-6x+8$ y T la relación definida en E por : xTy si y sólo si f(x)=f(y). El lector puede verificar facilmente que T es efectivamente una relación de equivalencia en E. Hallemos su partición asociada, $\phi(T)$. Observemos que se tiene :
f(1)=3 , f(2)=0 , f(3)= -1 , f(4)=0 , f(5)=3 , f(6)=8 ; por lo tanto
las diferentes clases de equivalencia son las siguientes 4 :
[1]=[5]={1, 5} , [2]=[4]={2, 4} , [3]={3} , [6]={6} .
La partición asociada a T (que es lo mismo que el conjunto cociente E/T) es entonces : {{1, 5} , {2, 4} , {3} , {6} } .

Ejemplo 19.
Sea E={a,b,c} . En E es posible definir 5 diferentes particiones y por lo tanto, recordando el teorema fundamental, 5 diferentes equivalencias, incluyendo por supuesto la identidad (xIy si y sólo si x=y) y la equivalencia "universal" (xUy para todo x, y).

Ejercicios.
E1. En cada uno de los siguientes casos, halle el conjunto S_T que define la relación T , de A en B, que se menciona:

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA2221 RELACIONES
Sept.-dic. 2006
[opcional], [Claudio Margaglio]

E1.a) A=B={ 1, 2, 3, 4, 5} ; xTy si y sólo si MCD(x,y)=1 ;

E1.b) A={a, b, c, d, e}, B={ a, b, 1, 2, 7} ; xTy si y sólo si x es vocal y y es consonante; ¿cual es la imagen de T?;

E1.c) con los mismos conjuntos A, B de 1.b), sea xSy si y sólo si x es consonante y y es número impar.

E2. Defina con palabras las relaciones que se mencionan en cada uno de los casos siguientes :

E2.a) A=B={1, 2, 3, 4, 5}; S_T={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)} ;

E2.b) A, B como en 2.a ; S_T={(1, 1), (2, 2), (4, 4), (5, 5)} ;

E2.c) A= conjunto de los enteros positivos, B=conjunto de los enteros; S_T= { } = ∅ ;

E3. En un sistema de coordenadas cartesianas Oxy haga un bosquejo de las gráficas de cada una de las relaciones que se definen a continuación :
E3a) A=B=**R**=conjunto de todos los reales; xTy si y sólo si $y=x^2$;
E3b) A=[0, 2] , B=**R** , xTy si y sólo si $y=x^2$;
E3c) A=B=[0, 2] , xTy si y sólo si $y=x^2$;
E3d) A=B=[0, 2] , xTy si y sólo si xy=1 ;
E3e) A=B=[0, 2] , xTy si y sólo si x<y ;
E3f) A=B=[0, 2] , xTy si y sólo si x > -1 , y > -1;
E3g) A=B=[0, 2] , xTy si y sólo si 1<x<3 .

E4. Para cada una de las siguientes relaciones en **R**, definidas mediante un subconjunto de **R**x**R** exprese la condición de que x esté relacionado con y por medio de fórmulas. A título de ejemplo, si fuese S_T= perímetro del cuadrado de vértices (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0) entonces podríamos escribir :

xTy si y sólo si " (x(x-1)=0, 0≤y≤1) o (y(y-1)=0, 0≤x≤1) ".

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA2221 RELACIONES
Sept.-dic. 2006
[opcional], [Claudio Margaglio]

E4a) S_T= circunferencia de centro C(1, 2) y radio 3 ;
E4b) S_T= poligonal ABC, con A(2, 3), B(0, 1), C(2, 7) ;
E4c) S_T= región del plano acotada por la elipse de focos F_1(-2, 0), F_2(2, 0), que pasa por el pto. H(0, 3) ,[ptos. internos y frontera] ;
E4d) S_T= todos los puntos del plano que tienen coordenadas enteras positivas.

E5. Dé un ejemplo de relación T en **R** (conjuntos de los reales) con dominio [-2, 17] e imagen [4, 6] .¿ es posible dar este ejemplo de manera que T sea una función ? Si no es posible, ¿como habria que modificar el enunciado de este ejercicio?

Soluciones de los ejercicios **E1** hasta **E5** .
SE1a. S_T = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4) } ;

SE1b. S_T = { (a, b), (e, b) } ; Im(T)= {b} ;

SE1c. S_T = { (b, 1), (b, 7), (c, 1), (c, 7), (d, 1), (d, 7) } .

SE2a. " aT b si y sólo si a=b $\in$ A " ;

SE2b. " aT b si y sólo si a=b $\in$ {1, 2, 4, 5} " o también :
" aT b si y sólo si 3$\neq$ a=b $\in$ A " ;

SE2c. " para toda escogéncia de a$\in$ A , b$\in$ B no se cumple aTb "o también : "ningún elemento de A está relacionado con algún elemento de B".

E3b) A=[0, 2] , B=**R** , xTy si y sólo si y=x^2 ;
El arco de parábola de extremos O(0, 0), P(2, 4);

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA2221 RELACIONES
Sept.-dic. 2006
[opcional], [Claudio Margaglio]

E3c) A=B=[0, 2] , xTy si y sólo si $y=x^2$;
El arco de parábola de extremos O(0, 0), Q($\sqrt{2}$, 2);
E3d) A=B=[0, 2] , xTy si y sólo si xy=1 ;
El arco de hipérbola de extremos M($\frac{1}{2}$, 2), N(2, $\frac{1}{2}$);
E3e) A=B=[0, 2] , xTy si y sólo si x<y ;
El triángulo de vértices O(0, 0), S(2, 2), T(0, 2) (todos los ptos. internos $\cup$ segmento cerrado [TS] $\cup$ segmento (OT]);
E3f) A=B=[0, 2] , xTy si y sólo si x > -1 , y > -1;
Todo el cuadrado de vértices O(0, 0), R(2, 0), S(2, 2), T(0, 2)
[ptos. internos $\cup$ perímetro] ;

E3g) A=B=[0, 2] , xTy si y sólo si 1<x<3 ;
El rectángulo de vértices U(1, 0), R(2, 0),S(2, 2), V(1, 2);
[ptos. internos $\cup$ segmentos semiabiertos (U, R], (V, S]]

SE4a) S_T= circunferencia de centro C(1, 2) y radio 3 ;
xTy si y sólo si : $x\in \mathbf{R}$, $y\in \mathbf{R}$, $(x-1)^2+(y-2)^2= 9$;

SE4b) S_T= poligonal ABC, con A(2, 3), B(0, 1), C(2, 7) ;
xTy si y sólo si : $0 \le x \le 2$ & (y=x+1 o y=3x+1) ;

SE4c) S_T= región del plano acotada por la elipse de focos F_1(-4, 0), F_2(4, 0), que pasa por el pto. H(0, 3) ,[ptos. internos y frontera] ;
Recordemos que la ecuación canónica de una elipse con focos F_1(-c, 0), F_2(c, 0) y semiejes de longitudes a, b , es : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, siendo $a^2-b^2=c^2$; por lo tanto, si c= 2 y si el punto H(0, 3) pertenece a la elipse, será : b=3 , $a=\sqrt{b^2+c^2} = 5$, por lo cual la ecuación de la elipse mencionada es : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$ o también :
$9x^2+25y^2 - 225 = 0$;
tomemos también en consideración la siguiente :

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA2221 RELACIONES
Sept.-dic. 2006
[opcional], [Claudio Margaglio]

Observación importante.
En general, si F(x, y) es una función continua definida en R^2 entonces la curva de ecuación F(x, y) = 0 divide al plano en regiones y para pasar de una región en cuyo interior F(x, y) tiene cierto signo a otra región en donde F(x, y) tiene signo opuesto, es preciso atravesar la curva mencionada [esta es una consecuencia del teorema del valor intermedio [Bolzano]);
A título de ejemplo, sea $F(x, y) = 9x^2+25y^2 - 225$;
la curva de ecuación $x^2+y^2- 3x+4y = 0$ es la elipse mencionada en el presente problema. Esta elipse divide el plano en dos regiones, una interna a la elipse y la otra externa y en todos los puntos de una misma región, el signo de F9x, y) será el mismo.
Para averiguar el signo que tiene F(x, y) en una región, basta averiguar con un pto. cualquiera que pertenezca a la región considerada.
[**aqui termina la observación importante**].
En el presente ejercicio, por ejemplo, $F(0,0) = -225 < 0$ mientras que $F(10, 10) = 900+2500-225 > 0$. Por lo tanto :
i) para todo punto interno a la elipse, será
$F(x, y) = 9x^2+25y^2 - 225 < 0$; para los puntos de la elipse :
F(x, y) = 0 , para los ptos. externos : F(x, y) > 0 .
En conclusión se tiene : x T y si y sólo si $9x^2+25y^2 - 225 \leq 0$.

SE4d) S_T= todos los puntos del plano que tienen coordenadas enteras positivas. xTy si y sólo si $x\in N$, $y\in N$, siendo N= {1, 2, ...} el conjunto de los números naturales.

SE5. Dé un ejemplo de relación T en **R** (conjuntos de los reales) con dominio [-2, 17] e imagen [4, 6] .¿ es posible dar este ejemplo de manera que T sea una función ? Si no es posible, ¿como habria que modificar el enunciado de este ejercicio?
Un posible ejemplo se obtiene con cualquier función sobreyectiva
$f: [-2, 17] \to [4, 6]$, por ejemplo la función definida
por $f(x) = \dfrac{-11x+80}{6}$, $x \in [-2, 17]$. cuya gráfica es el segmento de extremos A(-2, 17), B(4, 6) .